

**Напряженно-деформированное состояние полого цилиндра
при действии равномерного внутреннего и наружного давления
(задача Ляме).**

Если напряжения в теле зависят только от координаты r , то такое поле называется *осесимметричным*. Оно возникает, например, при действии на длинный полый цилиндр (рис. 12.1) равномерного внутреннего p_a и наружного p_b давления.

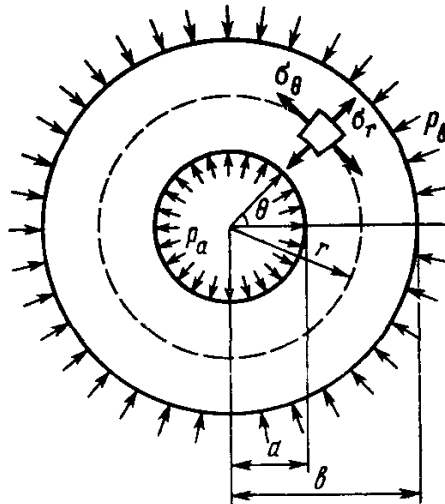


Рис.12.1. Длинный полый цилиндр

Приведем решение этой задачи в перемещениях. В качестве основной неизвестной функции примем радиальное перемещение $u = u(r)$.

Тангенциальная компонента перемещений v в виду осевой симметрии равна нулю. В лекции №11 были получены уравнения связывающие деформации и перемещения (уравнения Коши):

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r},$$

которые в нашем случае примут вид:

$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \gamma_{r\theta} = 0.$	(12.1)
--	--------

Соответственно формулы закона Гука

$$\sigma_r = E_1(\varepsilon_r + \mu \varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = E_1(\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_r), \quad \tau_{r\theta} = G \gamma_{r\theta}, \quad E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} \quad \text{примут вид:}$$

$\sigma_r = E_1 \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right), \quad \sigma_\theta = E_1 \left(\mu \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right), \quad \tau_{r\theta} = 0.$	(12.2)
--	--------

Из уравнений равновесия $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + R = 0$,

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau + \Theta = 0 \quad \text{остается только одно уравнение (составляющие}$$

объемных сил $R = 0, \Theta = 0$)

$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0.$	(12.3)
---	--------

Подставляем выражения для напряжений (12.2) в уравнение (12.3) приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно перемещений

$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{1}{r^2} u = 0.$	(12.4)
---	--------

Общее решение уравнения имеет вид

$u = C_1 \cdot r + C_2 \frac{1}{r}.$	(12.5)
--------------------------------------	--------

Подстановка (12.5) в формулы для напряжений (12.2) дает

$\begin{aligned} \sigma_r &= E_1 [C_1(1 + \mu) - C_2(1 - \mu) \frac{1}{r^2}], \\ \sigma_\theta &= E_1 [C_1(1 + \mu) + C_2(1 - \mu) \frac{1}{r^2}] \end{aligned}$	(12.6)
--	--------

Постоянные интегрирования определяем из условий на поверхности

$r = a, \sigma_r = -p_a; \quad r = b, \sigma_r = -p_b.$	(12.7)
---	--------

Записываем условия на поверхности (12.7) с учетом выражений для напряжений (12.6) получим систему двух линейных алгебраических уравнений, из которой определяем константы интегрирования:

$C_1 = -\frac{b^2 \cdot p_b - a^2 p_a}{(1 + \mu) E_1 (b^2 - a^2)}, \quad C_2 = -\frac{a^2 b^2 (p_b - p_a)}{(1 - \mu) E_1 (b^2 - a^2)}.$	(12.8)
---	--------

Окончательно для напряжений получим:

$\begin{aligned} \sigma_r &= p_a \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) - p_b \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \\ \sigma_\theta &= p_a \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) - p_b \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right). \end{aligned}$	(12.9)
---	--------

На рис. 12.2 показано распределение напряжений вдоль радиуса при $p_b = 0, p_a = p$ (внутреннее давление). При этом напряжения определяются по формулам:

$\sigma_r = p_a \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \quad \sigma_\theta = p_a \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right).$	(12.10)
--	---------

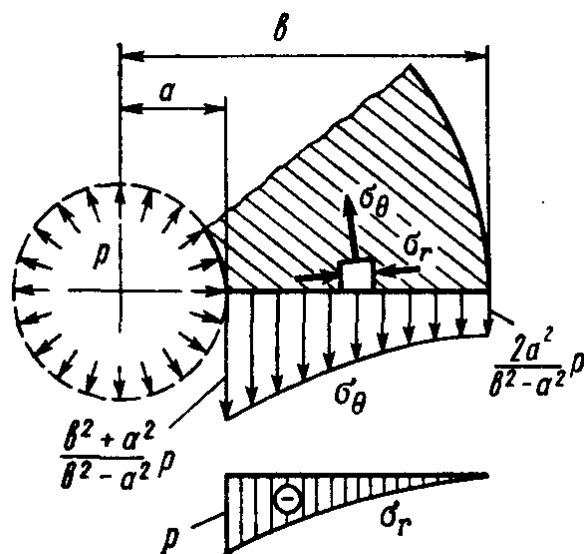


Рис. 12.2. Действует только внутреннее давление

Наибольшее растягивающее напряжение возникает в точках внутренней поверхности цилиндра и превышает давление p . При $\frac{b}{a} \rightarrow \infty$ напряжении $\sigma_{\theta \max} \rightarrow p$. При $b \rightarrow a$ и $b - a = \delta$ напряжение $\sigma_{\theta} = \frac{pa}{\delta}$, т.е. как в тонкостенной трубе.

На рис.12.3 показано распределение напряжений в случае, когда внутреннее давление отсутствует, а к внешней границе приложено растягивающее напряжение σ .

Когда отверстие мало (при $\frac{b}{a} \rightarrow \infty$) формулы (12.10) дают

$\sigma_r = \sigma \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{\theta} = \sigma \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right).$	(12.11)
--	---------

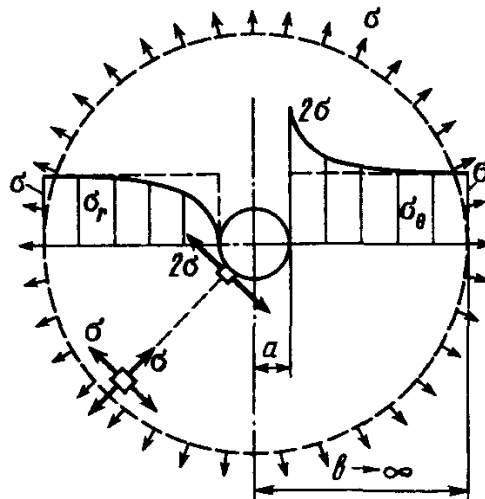


Рис. 12.3. Действует только наружное давление равное σ

У отверстия наблюдается концентрация напряжений σ_θ , причем $\sigma_{\theta \max} = 2\sigma$ ($\sigma_r = 0$). Вдали от отверстия имеем плоское гидростатическое растяжение с напряжениями $\sigma_\theta = \sigma_\kappa = \sigma$.

Расчет опускного колодца

